

## Ein LISREL-Test von multivariaten Mittelwertdifferenzen bei inhomogenen Varianzen und Kovarianzen: das Beispiel der Gastarbeiter-Items aus dem ALLBUS 1980 und 1984

Kühnel, Steffen M.

Veröffentlichungsversion / Published Version

Zeitschriftenartikel / journal article

Zur Verfügung gestellt in Kooperation mit / provided in cooperation with:

GESIS - Leibniz-Institut für Sozialwissenschaften

### Empfohlene Zitierung / Suggested Citation:

Kühnel, S. M. (1987). Ein LISREL-Test von multivariaten Mittelwertdifferenzen bei inhomogenen Varianzen und Kovarianzen: das Beispiel der Gastarbeiter-Items aus dem ALLBUS 1980 und 1984. *ZA-Information / Zentralarchiv für Empirische Sozialforschung*, 21, 52-58. <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0168-ssoar-205255>

### Nutzungsbedingungen:

Dieser Text wird unter einer Deposit-Lizenz (Keine Weiterverbreitung - keine Bearbeitung) zur Verfügung gestellt. Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

### Terms of use:

This document is made available under Deposit Licence (No Redistribution - no modifications). We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document. This document is solely intended for your personal, non-commercial use. All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.



Ein LISREL-Test von multivariaten Mittelwertdifferenzen bei inhomogenen Varianzen und Kovarianzen.

Das Beispiel der Gastarbeiter-Items aus dem ALLBUS 1980 und 1984

von Steffen Kühnel

In der Ausgabe Nr. 17 der ZA-Information vergleichen GEHRING und BÖLTKE die Antworten auf vier Items zur Einstellung gegenüber Gastarbeitern, die zuerst 1980 und ein zweites Mal 1984 in der Allgemeinen Bevölkerungsumfrage der Sozialwissenschaften (ALLBUS) gestellt wurden. In ihrer deskriptiven Analyse dieser Daten kamen die Autoren zum Ergebnis, daß die Ausländerfeindlichkeit tendenziell abgenommen hat. So zeigt etwa Abbildung 1, daß bei allen vier Variablen die Mittelwerte 1984 deutlich geringer sind als 1980, die Befragten im Durchschnitt also den Gastarbeiter diskriminierenden Items weniger stark zustimmten.

Bei der inferenzstatistischen Absicherung eines solchen Schlusses wird üblicherweise als Verallgemeinerung des T-Tests auf signifikante Mittelwertdifferenzen eine multivariate Varianzanalyse durchgeführt. Die multivariate Betrachtung wird notwendig, da mehrere abhängige Variablen analysiert werden und diese korreliert sind. Signifikante Ergebnisse der T-Tests können dann nicht als unabhängige Bestätigungen der Existenz von Mittelwertunterschieden in der Population gelten. Die multivariate Varianzanalyse (MANOVA) berücksichtigt solche Korrelationen durch den simultanen Vergleich aller abhängigen Variablen (1).

Die Analyse dieser Daten mit der SPSSx-Prozedur MANOVA führt tatsächlich zu einer hochsignifikanten Bestätigung der Ergebnisse von GEHRING und BÖLTKE: Die Wahrscheinlichkeit, daß bei Berücksichtigung der Stichprobendaten die Mittelwerte der vier Items in der Population 1984 die gleichen Werte haben wie 1980, ist praktisch null. Der einzige Schönheitsfehler der Analyse besteht darin, daß der Box-M-Test ergibt, daß eine Anwendungsvoraussetzung der multivariaten Varianzanalyse verletzt ist: die Varianzen und Kovarianzen der vier abhängigen Variablen haben 1984 signifikant andere Werte als 1980. Es stellt sich also die Frage, ob es einen alternativen statistischen Test gibt, der auch bei Inhomogenität der Varianzen und Kovarianzen zwischen den Gruppen Mittelwertsvergleiche erlaubt.



Abbildung 1: I Variablenformulierungen, Antwortskalen und Stichprobenergebnisse 1980 und 1984

Variable	Formulierung im ALLBUS-Fragebogen 1980 und 1984			
Anpassen	Gastarbeiter sollten ihren Lebensstil ein bißchen besser an den der Deutschen anpassen			
Remigrat	Wenn Arbeitsplätze knapp werden, sollte man die Gastarbeiter wieder in ihre Heimat zurückschicken			
NonPolit	Man sollte Gastarbeitern jede politische Betätigung in Deutschland untersagen			
NoHeirat	Gastarbeiter sollten sich ihre Ehepartner unter ihren eigenen Landsleuten auswählen			
Antwortskala:	7 -	stimme voll und ganz zu		
	6			
	5			
	4			
	3			
	2			
	1 -	stimme überhaupt nicht zu		

Stichprobendaten aus dem ALLBUS 1980 (N=2925)				
	Anpassen	Remigrat	NonPolit	NoHeirat
Mittelwert:	4.990	4.419	4.403	4.017
Stand.-Abw.:	1.871	2.147	2.250	2.294
Korrelationen:				
Anpassen	1.000			
Remigrat	.440	1.000		
NonPolit	.377	.515	1.000	
NoHeirat	.385	.483	.503	1.000

Stichprobendaten aus dem ALLBUS 1984 (N=2967)				
	Anpassen	Remigrat	NonPolit	NoHeirat
Mittelwert:	4.841	4.000	4.229	3.488
Stand.-Abw.:	1.931	2.128	2.309	2.297
Korrelationen:				
Anpassen	1.000			
Remigrat	.364	1.000		
NonPolit	.376	.498	1.000	
NoHeirat	.336	.458	.488	1.000



Tatsächlich läßt sich ein solcher Test recht einfach im Rahmen von Moment-Strukturanalysen mit LISREL durchführen<sup>2</sup>. Ganz analog der Betrachtung einer Messung als Kombination aus "wahrem" Wert und Meßfehler werden hierzu die Antworten  $x$  eines Befragten  $i$  für jede Gruppe  $k$  und jede Variable  $j$  in Mittelwert  $\bar{x}$  und Restgröße  $e$  zerlegt:

$$(1) \quad x_{ij}^k = \bar{x}_j^k + e_{ij}^k$$

Bei der Umsetzung als LISREL-Modell werden die Mittelwerte als Regressionskoeffizienten auf eine latente  $\xi$ -Variable mit dem konstanten Wert eins und die Restgrößen als Meßfehler Delta modelliert:

$$(2) \quad x_{ij}^k = \lambda_j^k \cdot \xi + \delta_{ij}^k$$

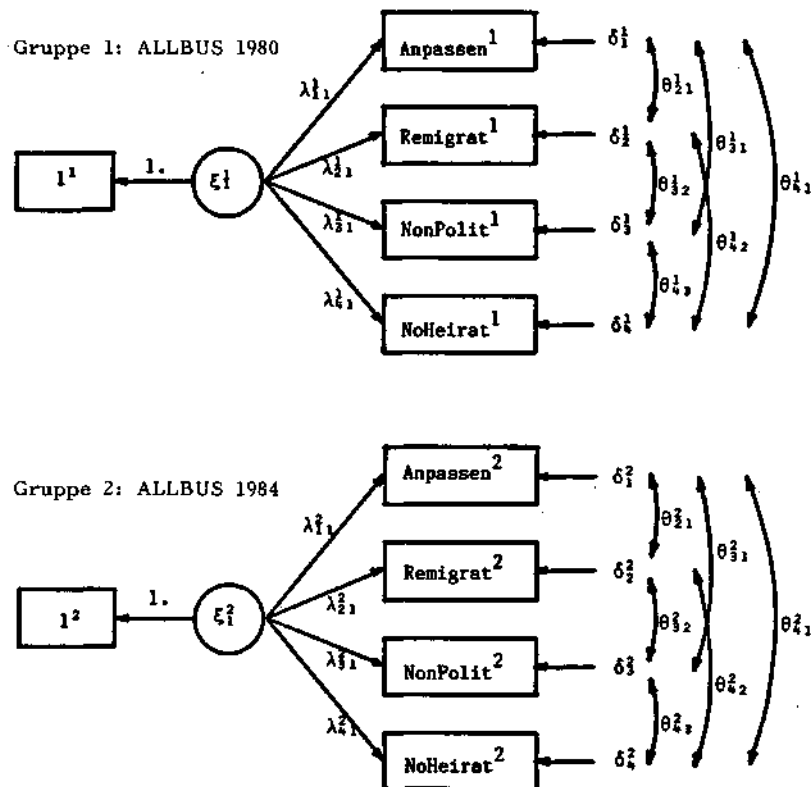
Eine Konsequenz dieser Modellierung ist, daß anstelle von Varianzen und Kovarianzen die Matrix der Rohproduktmomente analysiert wird<sup>3</sup>. Abbildung 2 zeigt diese Spezifikation als Pfadmodell.

Das Modell ist zunächst gerade identifiziert. Zum Testen der Nullhypothese gleicher Mittelwerte werden die Lambdas über die Gruppen hinweg gleichgesetzt. Abb. 3 gibt hierzu die LISREL-Anweisungen wieder. Der ausgegebene Chiquadratwert ist als Likelihood-Ratio-Test der Nullhypothese unveränderter Mittelwerte zu interpretieren. Bei den Daten aus den ALLBUS-Erhebungen 1980 und 1984 führt der Test zu einer hochsignifikanten Ablehnung dieser Hypothese. Auch der LISREL-Test ohne die falsche Annahme gleicher Varianzen und Kovarianzen bekräftigt die Schlußfolgerung von GEHRING und BÖLTKE.

Die nahezu identischen Ergebnisse beider Testverfahren weisen darauf hin, daß der multivariate Mittelwertvergleich bei nur zwei Gruppen recht robust gegenüber Verletzung der Annahme gleicher Varianzen und Kovarianzen in den beiden Gruppen zu sein scheint. Tatsächlich zeigt ein Blick auf die geschätzten Korrelationen der LISREL-Parameterschätzungen, daß die Varianzen und Kovarianzen der abhängigen Variablen (in der LISREL-Notation die Varianzen und Kovarianzen der Deltas) unabhängig von den Mittelwerten (d.h. den Lambdas) bestimmt werden.



Abbildung 2: LISREL-Spezifikationen eines MANOVA-Designs über Gruppenvergleich mit modellierten Erwartungswerten



Hypothese	Chiquadrat	df	p	zusätzliche Restriktionen
gleiche Mittelw.	105,25	4	0.000	$\lambda_{i1}^1 = \lambda_{i1}^2$ $i=1,2,3,4$
ungleiche Mittelw.	0.0	0	-	
L.-R.-Test:	105,25	4	0.000	

**Abbildung 3: LISREL-Anweisungen für den Mittelwerttest**

Test von Mittelwertdifferenzen mit LISREL-Gruppenvergleich (A: Daten von 1980) C  
am Beispiel der Gastarbeiter-Items aus dem ALLBUS 1980 und 1984

DA NI=4 C vier abhaengige Variablen  
NG=2 C simultane Schaetzung über zwei Gruppen  
NO=2925 C Fallzahl in der Stichprobe von 1980  
MA=AM C Analyse von Rohmomenten anstelle von Varianzen/Kovarianzen

## LABELS

'Anpassen', 'Remigrat', 'NonPolit', 'NoHeirat'

## MEANS

4.990, 4.419, 4.403, 4.017

## SD

1.871, 2.147, 2.250, 2.294

## KM SY

1.000

0.440 1.000

0.377 0.515 1.000

0.385 0.483 0.503 1.000

## MD

C Modellspezifikation

NX=5 C 5 X-Variablen (= 4 abhängige Variable + Konstante)

NK=1 C 1 latente Xi-Variable

LX=FU,FR C alle Ladungen der X-Variablen sind freigegeben

TD=SY,FR C alle Varianzen und Kovarianzen der Residuen sind frei

PH=SY,FR C die Varianz der latenten Variable muss frei sein !

## FI

C Fixieren der Varianz und Kovarianzen der Residuen der Konst.

TD(5,1) TD(5,2) TD(5,3) TD(5,4) TD(5,5)

## FI

C Fixieren der Ladung von Xi auf Konstante

LX(5,1)

## VA

1.0 LX(5,1) C Gleichsetzen von Konstante und latenter Variable

## ST 0.5 ALL

ST 1.0 TD(1,1) TD(2,2) TD(3,3) TD(4,4) PH(1,1) C Startwerte vorgeben

## OU NS

C keine Startwerte neu berechnen

## SE

C Ausgabe der Standardabweichungen der Parameterschätzungen

## PC

C Ausgabe der Korrelationen der Parameterschätzungen

Test von Mittelwertdifferenzen: Gruppe 2 (B: Daten von 1984)

DA NI=4

C vier abhängige Variablen

NO=2967 C Fallzahl in der Stichprobe von 1984

MA=AM

## LABELS

'Anpassen', 'Remigrat', 'NonPolit', 'NoHeirat'

## MEANS

4.841, 4.000, 4.229, 4.488

## SD

1.931, 2.128, 2.309, 2.297

## KM SY

1.000

0.364 1.000

0.376 0.498 1.000

0.336 0.458 0.488 1.000

## MO

C Modellspezifikation: gleiche Lambdas zwischen den Gruppen !

NX=5 NK=1 TD=PS PH=PS LX=LN

OU NS SE PC



Daß diese Robustheit gegenüber unterschiedlichen Varianzen und Kovarianzen in den Gruppen nicht generell gilt, zeigt ein kleines Monte-Carlo-Experiment, bei dem die Gleichheit der Mittelwerte von vier korrelierten Variablen über vier Gruppen von je 500 Fällen verglichen wurde: Bei ungleichen Varianzen und Kovarianzen konnte der Likelihood-Ratio-Test mit LISREL bei ungleichen Varianzen und Kovarianzen zwischen richtigen und falschen Nullhypothesen diskriminieren, während die mit SPSS berechnete multivariate Varianzanalyse zu sehr unbefriedigenden Testergebnissen führte<sup>4</sup>.

Mit dem LISREL-Gruppenvergleich kann nicht nur die Gleichheit bzw. Verschiedenheit der Mittelwerte bei inhomogenen Varianzen und Kovarianzen getestet werden, sondern auch die Homogenität oder Inhomogenität der Varianzen und Kovarianzen. Dazu werden bei der Spezifikation des Modells nach Abbildung 2 nicht die Lambdas, sondern die Varianzen und Kovarianzen der Deltas (Theta-Deltas) über die Gruppen hinweg gleichgesetzt. Führt ein solcher Test zu dem Ergebnis, daß die Varianzen und Kovarianzen nicht signifikant verschieden sind, dann kann in einem zweiten Schritt zusätzlich die Gleichheit der Mittelwerte durch Gleichsetzen der Lambdas geprüft werden. Die Chiquadrat-Differenz der beiden Schritte führt zu einem Likelihood-Ratio-Test mit den gleichen Annahmen wie bei der multivariaten Varianzanalyse. Durch die Formulierung zusätzlicher Restriktionen ist es also möglich, diese oder andere Annahmen explizit zu spezifizieren und zu testen. Damit ist ein Weg gefunden, der von relativ unverbundenen Hypothesen über einzelne Variablen zu einem theoretisch gehaltvolleren Modell mit spezifizierten Aussagen über die Struktur der postulierten Beziehungen zwischen den betrachteten Variablen verläuft.

Ob und wie weit dieser Weg gangbar ist, hängt selbstverständlich auch davon ab, ob restriktivere Modelle mit den Daten vereinbar sind. Hierzu bietet der LISREL-Ansatz mit dem Likelihood-Ratio-Test ein einheitliches und intuitiv einleuchtendes Testkriterium, das auf den Unterschieden zwischen den empirisch beobachteten und den vom Modell implizierten Momentmatrizen beruht. Demgegenüber werden in der üblichen multivariaten Varianzanalyse unterschiedliche Teststatistiken verwendet.

Bei allen Vorteilen dieses Ansatzes gegenüber der herkömmlichen Varianzanalyse muß allerdings auch bedacht werden, daß die Tests mit LISREL auf asymptotischer Testtheorie beruhen. Bei kleinen Stichproben, wie sie etwa bei psychologischen Experimenten üblich sind, ist es fraglich, ob die An-



näherungen hinreichend genau sind. Zu beachten ist auch, daß mit steigender Gruppen- und Variablenzahl die Anzahl der freien Parameter schnell steigt und das LISREL-Programm möglicherweise auf numerische Probleme bei der Bestimmung der Maximum-Likelihood-Lösung stößt.

Alles in allem gesehen scheint mir - trotz dieser Einschränkungen - der Test von Mittelwertdifferenzen über einen Gruppenvergleich mit LISREL bei vielen Anwendungen eine überlegenswerte und leicht anzuwendende Alternative zur klassischen multivariaten Varianzanalyse zu sein.

#### Anmerkungen:

1. Eine Darstellung der multivariaten Varianzanalyse findet sich in FAHRMEIER/HAMERLE (1984).
2. Für den univariaten Mittelwertsvergleich hat meines Wissens MÖBUS (1986:93) erstmals auf die Möglichkeit des Verzichts der Homoskedastizitätsannahme bei der Verwendung von LISREL hingewiesen.
3. Dieses Vorgehen entspricht der üblichen multiplen Regression, bei der die Regressionskonstante ebenfalls durch die Aufnahme einer (Pseudo-) Variablen mit dem konstanten Wert eins in die Design-Matrix der erklärenden Variablen berechnet werden kann. Der Kleinst-Quadrat-Schätzer basiert dann ebenfalls auf den Rohmomenten (vgl. etwa die Darstellung in HANUSHEK/JACKSON 1977:113-116).
4. Eine genaue Beschreibung des Monte-Carlo-Experiments und der Ergebnisse kann beim Autor angefordert werden (KÜHNEL 1987).

#### Literatur:

GEHRING, A., F. BÖLTKE (1985), "Einstellungen zu Gastarbeitern 1980 und 1984: Ein Vergleich." ZA-Information, Heft 17:23-33.

HANUSHEK, E.A., J.E. JACKSON (1977), Statistical Methods for Social Scientists. New York: Academic Press.

FAHRMEIER, L., A. HAMERLE (Hrsg.) (1984), Multivariate statistische Verfahren. Berlin: de Gruyter.

KÜHNEL, S.M. (1987), How to Test MANOVA Designs with LISREL. Paper: Central Archive for Empirical Social Research at the University of Cologne.

MÖBUS, C. (1986), "Analyse von Rohdaten mit LISREL - Allgemeines Lineares Modell, stochastische Differenzen- und Differentialgleichungssysteme." S. 57-126 in: C. MÖBUS u. W. SCHNEIDER (Hrsg.), Strukturmodelle für Längsschnittdaten und Zeitreihen. LISREL, Pfad- und Varianzanalyse. Bern: Hans Huber.